

Trei demonstrații geometrice ale inegalității mediilor AM-GM

Matematică - Geometrie

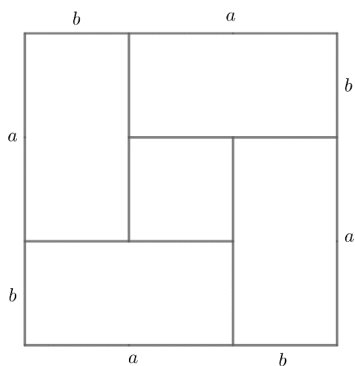
www.enciclopul.ro

Vom demonstra inegalitatea mediilor AM-GM pentru două numere:

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

Găsim următoarele soluții:

Soluția 1. Vom folosi relații de arii într-un pătrat. Considerăm un pătrat de latură $a+b$, pe care le împărțim în segmente de lungime a și b , ca în figură.



Observăm că suma ariilor dreptunghiurilor cu laturile a și b este cel mult egal cu aria pătratului de latură $a+b$.

$$4ab \leq (a+b)^2$$

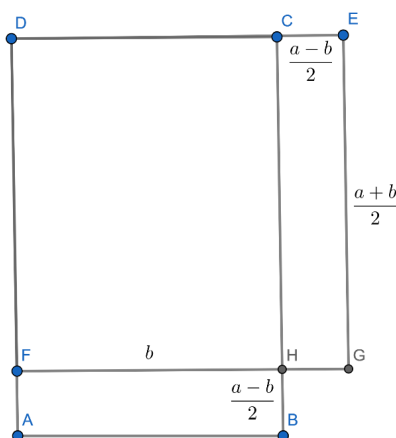
Rămâne că:

$$\frac{(a+b)^2}{4} \geq ab$$

Obținem relația:

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

Care este inegalitatea mediilor.



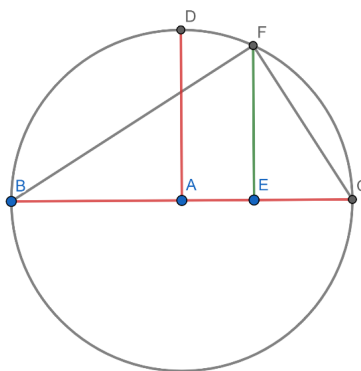
Soluția 2. Vom folosi o transformare geometrică din dreptunghi în pătrat. Vom considera un dreptunghi de laturi (a, b) , $a \geq b$. Construim pătratul de latură $\frac{a+b}{2}$, într-o transformare geometrică.

Atunci, segmentele $CE = BH = \frac{a-b}{2}$. Observăm atunci că $b \leq \frac{a+b}{2}$, de unde aria $\sigma[CEGH] \geq \sigma[BHFA]$. Înseamnă că aria pătratului este mai mare decât aria dreptunghiului inițial, adică $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \geq ab$, de unde rezultă:

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

Ceea ce este inegalitatea AM-GM pe care căutăm s-o demonstrăm.

Soluția 3. Vom folosi o demonstrație geometrică clasică, într-un arc de cerc. Definim un semicerc ω între două puncte B și C , cu centrul în A . Luăm un punct E pe dreapta AB , astfel încât $BE = a$ și $CE = b$. Ridicăm perpendicularele AD , cu $D \in \omega$ și EF , cu $F \in \omega$ pe dreapta AB .



Observăm că avem următoarea relație geometrică:

$$AD \geq FE$$

Cum AD rază, găsim că:

$$AD = \frac{a+b}{2}$$

Din Teorema Înălțimii, luăm că:

$$FE = \sqrt{ab}$$

De unde avem inegalitatea:

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

Care este chiar inegalitatea mediilor. Ceea ce trebuia demonstrat.